自然数列の最小公倍数の下界

ゆうき

2004 年 3 月 5 日

概 要

最初の n 自然数たちの最小公倍数を下から評価する。証明は M.Nair の On Chebyshev-Type Inequalities for Primes, 1982 をのものを参考にした。

1 評価

Definition 1 **(d_n).** d_n を、自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の最小公倍数をとする。

Lemma 1 **(d_n の下界).** $d_n \geq 2^n$

2 証明

まず最初に

$$I = I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx \quad \text{for } 1 \leq m \leq n$$

と定義する。この I を 2 通りに評価することで

$$\forall m\ (1 \leq m \leq n) \quad m\binom{n}{m} \,\Bigg|\, d_n$$

を示したい。

最初に、I を部分積分の繰り返しで評価する。

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{m}\left[x^m(1-x)^{n-m}\right]_0^1 + \frac{n-m}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m-1}\,dx \\
&= \frac{n-m}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m-1}\,dx \quad (\because \text{前式第 1 項は 0}) \\
&= \frac{1}{m}(n-m)\left\{\frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}(1-x)^{n-m}\right]_0^1\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{n-m-1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-m-1}\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{(n-m)(n-m-1)}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-m-1}\,dx
\end{aligned} \tag{1}
$$

$\vdots$

$\vdots$ $(n+m)$ 回繰り返す

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2}{(m+1)(m+2)\cdots(n-1)}\cdot\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^0\,dx \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2}{(m+1)(m+2)\cdots(n-1)}\cdot\frac{1}{n}\left[x^n\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(n-1)\cdot n} \\
&= 1\bigg/\left(m\binom{n}{m}\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

一方、二項定理より

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx \\
&= \int_0^1 x^{m-1}\left(\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r\binom{n-m}{r}x^r\right)dx \\
&= \sum_{r=0}^{n-m}\left[(-1)^r\binom{n-m}{r}\int_0^1 x^{m+r-1}\,dx\right] \\
&= \sum_{r=0}^{n-m}\left[(-1)^r\binom{n-m}{r}\cdot\frac{1}{m+r}\left[x^{m+r}\right]_0^1\right] \\
&= \sum_{r=0}^{n-m}\left[(-1)^r\binom{n-m}{r}\frac{1}{m+r}\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

今、$\sum$ の各項について $r \leq n-m$ より $m+r \leq n$ である。従って $(m+r) \mid d_n$ となり、$d_n/(m+r)$ は正整数。従って $I \cdot d_n$ も正整数。

今、$I = \left(m\binom{n}{m}\right)^{-1}$ なのだから、

$$\forall m\ (1 \leq m \leq n), \quad m\binom{n}{m} \,\middle|\, d_n \tag{4}$$

が示された。

特に (4) において $n \to 2n,\ m \to n$ とすれば $n\binom{2n}{n} \mid d_{2n}$

$d_{2n} \mid d_{2n+1}$ だから

$$n\binom{2n}{n} \,\middle|\, d_{2n+1} \tag{5}$$

同様に (4) において $n \to 2n+1,\ m \to n+1$ とすれば

$$(n+1)\binom{2n+1}{n+1} \,\middle|\, d_{2n+1} \tag{6}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
(2n+1)\binom{2n}{n} &= (2n+1)\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \\
&= \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{(2n+1)(2n)!}{n!n!} \\
&= (n+1) \cdot \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)n! \times \{(2n+1)-(n+1)\}!} \\
&= (n+1) \cdot \frac{(2n+1)!}{\{}(n+1)!(2n+1)-(n+1)\}! \\
&= (n+1)\binom{2n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

従って、(6) より

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \,\middle|\, d_{2n+1} \tag{7}$$

ユークリッドの互除法より $n,\ 2n+1$ は互いに素だから (5) と (7) を合わせると

$$n(2n+1)\binom{2n}{n} \,\middle|\, d_{2n+1}$$

従って、$d_{2n+1} \geq n(2n+1)\binom{2n}{n}$

更に、二項定理より

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{k}1^k \cdot 1^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

なので、

$$d_{2n+1} \geq n \cdot 4^n \tag{8}$$

　これより、$n \geq 2$ ならば

$$d_{2n+1} \geq n \cdot 4^n \geq 2 \cdot 4^n = 2^{2n+1}$$

つまり、5 以上の奇数 k について $d_k \geq 2^k$
　また $n \geq 4$ ならば

$$d_{2n+2} \geq d_{2n+1} \geq n \cdot 4^n \geq 4 \cdot 4^n = 2^{2n+2}$$

つまり、10 以上の偶数について $d_k \geq 2^k$
　また、$d_8 = 840 \geq 256 = 2^8$, $d_6 = 60 \not\geq 64 = 2^6$ だから、$n \geq 7$ について $d_n \geq 2^n$ が言える。

参考文献

[1] M.Nair, On Chebyshev-Type Inequalities for Primes, *The American Mathematical Monthly*, Vol89, No.2(Feb., 1982), 126-129